



I Jornada Científica
IFPI, Campus Floriano
19, 20 e 21 de maio



APLICAÇÕES DE NÚMEROS COMPLEXOS NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE IMPEDÂNCIA INDUTIVA: UMA REVISÃO

Juniel Rocha Lima - IFPI, Campus Floriano - juniel162011@hotmail.com

André Luiz Ferreira de Carvalho Melo - IFPI, Campus Floriano – andreluiz@ifpi.edu.br

Eixo Temático: Matemática e suas tecnologias

RESUMO

É de conhecimento da comunidade científica que a Matemática é uma das ciências mais importantes para a Humanidade. Seja pelo desenvolvimento abstrato seja pela aplicabilidade nos mais variados contextos, o conhecimento matemático tem fundamental importância para o desenvolvimento social, científico e Tecnológico. Dentre as muitas aplicações, percebe-se a influência da Matemática, em particular dos Números Complexos, na eletricidade, em especial no estudo de problemas de impedância indutiva. Assim, este trabalho teve por Objetivo Geral Identificar a importância dos conceitos de números complexos utilizados no estudo de problemas de impedância indutiva. Para tal, foi utilizada como metodologia um Revisão de Literatura feita em Livros e Artigos que abordam a referida temática. Ao fim do trabalho, percebeu-se como de grande relevância o conhecimento de Números Complexos no entendimento dos conceitos de problemas de impedância indutiva.

Palavra-Chave: Matemática. Números Complexos. problemas de impedância indutiva.



1 INTRODUÇÃO

A matemática está presente em todos os ambientes nos dias atuais, em construções, nos jogos virtuais e principalmente nas ciências exatas, como na eletricidade. A Energia elétrica é imprescindível nos dias atuais, pois quase tudo precisa de eletricidade para funcionar, tendo em vista o avanço das tecnologias.

Segundo COSTA (2013) A matemática é considerada por muitos indivíduos como uma disciplina com grau de dificuldade elevado, devido principalmente ao fato dos estudantes não conseguirem estabelecer relações entre os conteúdos estudados e as situações e problemas vividos em seu cotidiano. Os educadores também vivenciam este problema, a dificuldade de ensinar ciências exatas hoje em dia é uma realidade nas escolas de ensino médio, assim como, nos cursos de educação profissional.

Contudo, é fundamental compreender os conteúdos matemáticos presente no currículo do curso de análise de circuito em corrente alternada. Pois, os conceitos de números complexos são essenciais para construir o conhecimento estudado no curso técnico em eletromecânica.

Como diz Corrêa (2015) um dos desafios enfrentados por estes alunos é a compreensão de Cálculos Matemáticos com Números Complexos utilizando notação retangular e polar, tópicos imprescindíveis para a aprendizagem de conceitos de potência complexa e sua aplicação em análise de circuitos em corrente alternada.

Nessa perspectiva, as ciências aplicadas foram desenvolvidas ao longo dos anos com o uso da matemática, merecendo destaque a descoberta dos números complexos, que, entre outras aplicações, ampliou o campo da eletricidade sendo base para todos estudos desenvolvido acerca da energia que alimenta quase tudo atualmente.

Os números complexos fazem parte de conteúdos pouco conhecidos, por conta da limitação de aplicabilidade no nosso dia a dia, mais no desenvolvimento profundo das ciências exatas, eles se tornam conteúdo principal, dentre elas a energia mais estilizada no mundo, a eletricidade.

Assim a questão norteadora da pesquisa foi: Quais as contribuições dos números complexos na resolução de problemas de impedância indutiva?



Justifica-se dessa maneira por buscar compreender os conceitos de números complexos utilizados no estudo de problemas de impedância indutiva no curso técnico em eletromecânica. E teve como Objetivos Específicos: Identificar os conceitos básicos de números complexos; investigar os conceitos básicos de problemas de impedância indutiva; aplicar os conceitos de números complexos na resolução de problemas de impedância indutiva à luz das pesquisas feitas.

2 MATERIAL E MÉTODOS

Este estudo tratou-se de uma revisão da literatura especializada, realizada entre junho de 2017 e dezembro de 2017 por meio de uma consulta a livros e periódicos presentes na Biblioteca do Instituto Federal do Piauí – IFPI, Campus Floriano, e por artigos científicos selecionados através de busca no banco de dados do Scielo e no Google Acadêmico.

A pesquisa foi realizada tendo como alicerce os seguintes descritores: Ensino de Matemática; Números Complexos; de problemas de impedância indutiva.

Os critérios de inclusão para os estudos encontrados foram: artigos, papers, trabalhos de conclusão de curso, monografias de especialização, teses, dissertações ou livros que tiveram suas publicações entre ao ano de 1998 e 2015, possuir todos os descritores.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O surgimento dos números complexos não foi diferente de outras áreas da matemática, início- se a partir da necessidade de resolver problemas.

No início do século XVI, no meio da disputa pela resolução da equação do 3º grau, é que se percebeu que os Números Reais não eram suficientes e surgem as primeiras ideias da criação do Conjunto dos Números Complexos, CAON (2013, P.15)

Foi o matemático Tartaglia, que conseguiu mostrar todas as soluções da equação do terceiro grau, em que seu feito se espalhou chegando ao conhecimento de Girolamo Cardano (1501-1576) que, em 1539, convenceu Tartaglia a revelar seu método de resolver equações cúbicas, sob juramento de que não publicaria antes que ele o fizesse. A regra foi revelada em forma de versos, mas sem a demonstração.

Com o problema da equação do terceiro grau, fica nítido e ao mesmo tempo uma curiosidade, como operar com raízes de números negativos se eles não existiam, até então.



Posteriormente o italiano Rafael Bombelli estudou os trabalhos de Cardano e percebeu que os números “funcionavam”. E ao longo do tempo sua representação foi variando até chegar $\sqrt{-1}$, afirma Dante (2010).

Pois segundo Caon (2013) Bombelli definiu as operações de adição e multiplicação para raízes de números negativos, escrevendo que $\sqrt{-i} \cdot \sqrt{-i} = i$. Com tudo fica evidente a necessidade de regra e representações, com fundamentação.

O desenvolvimento do conceito de número não deu-se na ordem que nos parece natural, e que é exposta nos textos: números naturais, inteiros, racionais, reais e por fim complexo. Antes mesmo dos números negativos serem considerados como verdadeiros números, já eram conhecidas e praticadas quase todas as regras operatórias sobre números complexos. Sendo assim, fica mais fácil entender o motivo que levava os matemáticos, no fim do século XVIII, a encararem os números imaginários ainda com certo desconforto.

Mais tarde o matemático Friedrich Gauss, que foi um grande estudioso da matemática, astrônomo e físico alemão, criador da geometria diferencial, conhecido como o "Príncipe dos Matemáticos", a ele se devem importantíssimos estudos de matemática, física, geometria e astronomia e outras áreas.

Mas foi em 1799, aos 21 anos, apresentou o que é considerado o mais importante dos alicerces da teoria das equações algébricas: O Teorema Fundamental de Álgebra. Este teorema afirma que toda equação polinomial de coeficientes reais ou complexos tem, no campo complexo, pelo menos uma raiz. (VIEIRA, 1999)

Como podemos perceber, os números complexos foram ao longo dos anos, deixando de ser uma ficção para tornar-se uma realidade dentro do campo da matemática, da física e de outros ramos da ciência, dentre eles a eletricidade.

Uma vez que a descoberta dos números complexos ampliou o campo da eletricidade sendo base para todos os estudos desenvolvidos acerca da energia que alimenta quase tudo atualmente.

Do modo que os números complexos e os reais preservam as mesmas propriedades, tais como adição multiplicação pode se perceber



Os números complexos como são definidos como: um conjunto em que as operações de soma e multiplicação, e também a possibilidade de extração da raiz quadrada de um número negativo. Dante (2010, p. 138).

Ainda segundo Dante (2010) denomina-se número complexo toda expressão na forma $a+bi$, em que a e b são números reais e i é a unidade imaginária.

Todo número complexo pode ser escrito na forma $z= a+bi$, em que a é a parte real e b é a parte imaginária de z .

A energia elétrica foi uma grande descoberta da humanidade, com ela iluminamos nossas casas, movemos grandes máquinas em indústrias. Hoje o homem depende da energia elétrica, principalmente com o advento da tecnologia, tudo que é criado depende de energia para funcionar.

Mais o primeiro registro do efeito atrativo da eletricidade data dos anos 600 a.C., na Grécia antiga. Tales de Mileto, considerado o primeiro físico e matemático grego, observou que o âmbar amarelo (uma resina fossilizada de árvores), depois de atritado com pele de carneiro, atraía pequenos pedaços de palha, tecidos, penas de aves e outros materiais. Surgia aí o conceito de eletrização. [...] A palavra grega para âmbar e *Elektro*, termo que, séculos mais tarde, daria nome as pequenas partículas que constituem os átomos, os elétrons, a base da eletricidade que se conhece hoje. [...] Em meados de 1745, surgiram o primeiro circuito elétrico e o primeiro capacitor, chamado garrafa de Leiden. E também desse período a primeira notícia de Morte causada por descarga elétrica. A vítima foi um professor da Universidade de Leiden, na Holanda. AFONSO E FILONE (2011, p.11)

Onde podemos perceber que, a energia elétrica vem do atrito com corpos, capazes de conduzir as partículas chamadas de elétrons. Pois o princípio básico é o movimento ordenado de elétrons através de um corpo.

O que Faraday descobriu foi denominado de corrente alternada devido seu fluxo variar, pois ela é gerada com o princípio de que ao movimentar um fio perto de um ímã, esse vai gerar um campo do qual vai induzir uma corrente que vai circular pelo fio de forma alternada, em que sua característica é descrita em forma de senoidal que varia do lado positivo para negativo. Daí o nome de corrente alternada.

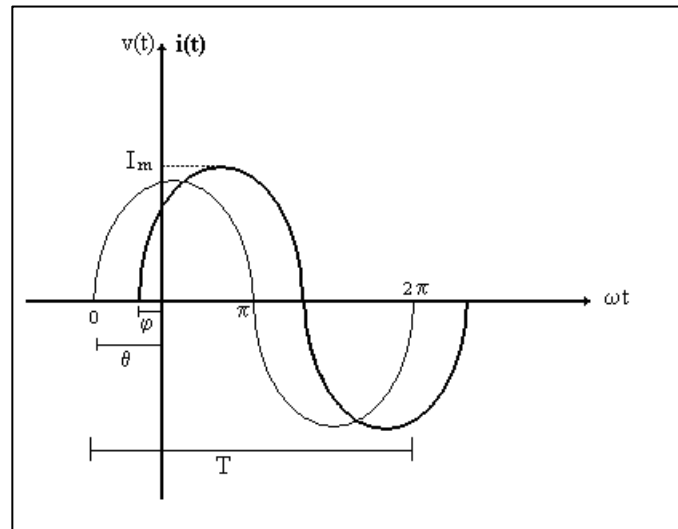


Figura 1 – Sinal Alternado – Santos (2011)

O Sinal alternado varia de polaridade e valor ao longo do tempo e, dependendo de como essa variação ocorre, há diversas formas de sinais alternados (senoidal, quadrada, triangular etc.) ALBUQUERQUE (2007, P. 30)

Período é o tempo necessário para completa o ciclo dado em (T) e o número de vezes que um ciclo se repete por segundo chama-se de frequência.

$$f = \frac{1}{T} \text{ (equação 1)}$$

Sendo (T) = s (segundo), (f) = Hz ou c/s (hertz ou ciclos / segundo)

Matematicamente, os gráficos de tensão senoidal nos domínios temporal e angular podem ser representados, respectivamente, por:

$$v(t) = V_p \cdot \sin \omega t \text{ (equação 2)}$$

$$v(\Theta) = V_p \cdot \sin \Theta \text{ (equação 3)}$$

Em que $v(t) = v(\Theta)$ = valor da tensão no instante t ou para o ângulo Θ (em V), V_p = valor de pico ou amplitude máxima da tensão (em V), ω = frequência angular (em rad/s) e Θ = ângulo (em rad/s)

Uma tensão senoidal pode ser representada graficamente de duas formas: nos domínios temporal e angular.com indica a figura.



A amplitude máxima, positiva ou negativa, que a tensão senoidal pode atingir é denominada tensão de pico V_p e amplitude total, entre os valores máximos positivo e negativo, é denominado tensão de pico a pico V_{pp} , sendo

$$V_{pp} = 2 \cdot V_p \text{ (equação 4)}$$

Matematicamente os gráficos da tensão nos domínios temporal e angular podem ser representados, respectivamente, por:

$$v(t) = V_p \cdot \text{sen} \omega t \text{ (equação 5)}$$

$$v(\theta) = V_p \cdot \text{sen} \theta \text{ (equação 6)}$$

Sendo: $v(t) = v(\theta) = n$ = valor da tensão no instante t ou para o ângulo θ (em V), V_p = valor de pico ou amplitude máxima da tensão (em V), ω = frequência angular (em rd/s) e θ = ângulo (em rd)

A frequência angular ou velocidade angular, representada pela letra grega ω (ômega), corresponde à variação do ângulo θ do sinal em função do tempo.

Das expressões matemáticas anteriores tem-se a relação

$$\theta = \omega t. \rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} \text{ ou } \omega = 2\pi f \text{ (equação 7)}$$

Nos circuitos elétricos, nem sempre um sinal senoidal inicia o seu ciclo no instante $t = 0$ s. neste caso, dizemos que o sinal possui uma fase inicial θ_0 .

Assim sendo, a expressão completa para representar o sinal senoidal deve incluir essa fase inicial, conforme segue:

Derivada da formula trigonométrica de um numero complexo temos.

$$v(t) = V_p \cdot \cos(\omega t + \theta_0) + V_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0) \text{ (equação 8)}$$

Como inicia em θ_0 , ou seja, o ângulo inicial é 0 sabemos que cosseno de 0 é um, portanto, temos:

$$v(t) = jV_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0) \text{ (equação 9)}$$

Pela primeira lei de Ohm tem-se:



$$i(t) = \frac{v(t)}{R} \rightarrow i(t) = \frac{V_p}{R} \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0) \rightarrow i(t) = I_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0) \text{ (equação 10)}$$

Segundo Albuquerque, o indutor ou bobina é um fio enrolado helicoidalmente sobre um núcleo, que pode ser de ar, ferro ou ferrite.

O indutor tem três características importantes: ele armazena energia na forma de campo magnético, o indutor se opõe a variações de corrente e a corrente está atrasada em relação à tensão.

A indutância L é a medida da capacidade do indutor de armazenar energia na forma de campo magnético. A unidade de medida da indutância é o Henry (H). (Albuquerque 2013, pg 67)

No indutor, a tensão é diretamente proporcional à variação de corrente, sendo L a constante de proporcionalidade, que é dada por:

$$v(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \text{ (equação 11)}$$

Sendo: $v(t) \rightarrow$ tensão no indutor, $L \rightarrow$ indutância, $\frac{di(t)}{dt} \rightarrow$ variação da corrente em função de tempo.

Se a tensão aplicada a um indutor ideal (resistência ôhmica nula) for senoidal, a corrente alternada fica atrasada 90° em relação à tensão, considerando que a tensão de fase inicial é nula. Assim:

A medida da oposição que o indutor oferece à variação da corrente é dada pela sua reatância indutiva X_L .

O valor (em módulo) da reatância é diretamente proporcional à indutância L e à frequência f da corrente (ou de sua frequência angular ω), sendo calculada por:

$$X_L = 2\pi fL \text{ ou } X_L = \omega L \text{ (equação 12)}$$

Sendo $X_L \rightarrow$ módulo da reatância indutiva em ohm, $L \rightarrow$ indutância da bobina em henry, $f \rightarrow$ frequência da corrente em hertz e $\omega \rightarrow$ frequência angular da corrente em radianos/segundo.



O indutor ideal comporta-se como um curto-circuito em corrente contínua e como uma resistência elétrica em corrente alternada. Para uma frequência muito alta, o indutor comporta-se como um curto-circuito.

A primeira lei de ohm pode ser usada num circuito em corrente alternada, substituído a resistência elétrica pela reatância elétrica, como descrito a seguir.

$$XL = \frac{v}{i} \text{ (equação – 13)}$$

Então podemos perceber que a reatância indutiva de um indutor ideal tem fase sempre igual a 90° (forma polar) ou somente a parte imaginária positiva (forma cartesiana).

A oposição que o indutor real oferece à passagem de corrente elétrica depende de R e de XL. Essa combinação é denominada impedância indutiva ZL, dado em Ohm. Do diagrama poder ser representados na forma de números complexos:

À frente, será apresentada uma aplicação de números complexos em problemas de eletrificadas.

Os números complexos são elementos chave no estudo de impedância elétrica, pois ao se calcular o valor de ZL e necessário usar a forma polar e cartesiana bem como o módulo de números complexos. (AGRICCO JUNIOR, 2016, P.6)

Daí, podemos perceber como é importante o estudo dos números complexos na resolução de questões de impedância bem como muitas áreas do estudo de circuito elétrico.

Problema 1: Determine a impedância equivalente do circuito, que tem 60Hz, uma resistência de 20 ohm e indutância de 40m H calcule a tensão Vs caso a corrente I seja I= 0,5 com defasagem de -22,98 A.

Resolução.

As impedâncias individuais são:

$$ZR = 20 \, \Omega$$

$$ZL = j\omega L = j(2\pi \cdot 60)(40 \cdot 10^{-3}) = j15.08 \, \Omega$$

A impedância equivalente e dada por:



$$Z = \frac{Z_R \cdot Z_L}{Z_R + Z_L}$$

Utilizando os valores para Z_R e Z_L , obtém-se

$$Z = \frac{(20)(j5,08)}{(20) + (j5,08)} = \frac{301,60 \angle 90^\circ}{25,05 \angle 37,02^\circ} = 7,25 + j9,61 \Omega$$

Note que o componente resistivo da impedância não é o resistor de 20Ω . Lembre-se-se que, $Z(j\omega) = R(\omega) + jx(\omega)$.(EQ1) sendo que a equação descrita advém da forma algébrica de um número complexo. Portanto, em geral, o componente resistivo da uma impedância equivalente é uma função de ω .

Se a corrente $I = 0,5 \angle -22,98^\circ A$, a tensão V_s é

$$V_s = IZ = (0,5 \angle -22,98^\circ)(12,04 \angle 52,98^\circ) = 6,02 \angle 30^\circ$$

Já na forma cartesiana (aplicação da forma cartesiana dos números complexos)

Sendo: $v(t) = jV_p \cdot \text{sen}(\omega t + \theta_0)$ note que $V_p = 6,02$

$$V_s = j6,02 \text{sen}30^\circ$$

Da fica nítido a relação que os números complexos têm com o estudo da impedância elétrica, e com outras grandezas como a corrente e a tensão.

Problema 2: Uma bobina, quando ligado a uma fonte CC de 10V, consome 100mA e, quando ligada a uma fonte CA de 10Vrms /500Hz, consome 20m A rms. Calcule a Resistencia, Reatância e indutância da bobina.

Resposta: quando a bobina é ligada à fonte CC, só existe o efeito da resistência ôhmica, pois sendo a tensão constante, a reatância indutiva é nula. Portanto:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{10}{100 \cdot 10^{-3}} = 100 \Omega$$

Quando a bobina é ligada à fonte CA, além da resistência ôhmica, há o efeito da reatância indutiva. Assim, o modulo da impedância indutiva é:

$$Z_L = \frac{V}{I} = \frac{10}{20 \cdot 10^{-2}} = 500 \Omega$$



Como $ZL = \sqrt{R^2 + X^2L}$, o valor da reatância indutiva é:

$$XL = \sqrt{Z^2L - R^2} = \sqrt{500^2 - 100^2} = 490\Omega$$

$$\text{Portanto, a indutância vale: } L = \frac{XL}{2\pi F} = \frac{490}{2\pi 500} = 156mH$$

Nota-se, que os números complexos estão presentes pois a se resolvera equação, $ZL = \sqrt{R^2 + X^2L}$ ela é resultado modulo de um numero complexos pois sua expressão $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$, onde **a** é a partir real de número complexo e **b** a parti imaginaria.

6 CONCLUSÕES

Tendo em vista os fatos supracitados, entendemos que a Matemática é de grande importância para o desenvolvimento científico e tecnológico. Nessa perspectiva, os Números Complexos se mostram como uma parte do acervo cultural da humanidade que contribuíram para a melhoria dos conceitos das ciências naturais, em especial da Física.

Ao fim do trabalho, pode-se observar que os Números Complexos são fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos de Eletricidade e em especial nos de Circuitos em Correntes Alternadas.

Assim, se faz necessário novas pesquisas com o intuito de corroborarem ou não com os resultados obtidos, bem como que realizem estudos de caso interdisciplinares entre Matemática e Física, relacionado Números Complexos e Circuitos em Correntes Alternadas.

REFERÊNCIAS

- AFONSO, Antônio Pereira. **Eletrônica: circuitos elétricos**. São Paulo: Fundação Padre Anchieta, 2011 (Coleção Técnica Interativa. Série Eletrônica, v. 1.
- ALBUQUERQUE, Rômulo Oliveira. **Análise de circuito em corrente alternada**/ Rômulo Oliveira Albuquerque. 2. Ed, São Paulo, 2007.
- BERBEL, N. A. N. **Metodologia da Problemática no Ensino Superior e sua contribuição para o plano da praxis**. Semina : v.17, n. esp., p.7-17, 1996.
- BOYER, Carl Benjamin. **História da Matemática**. sat Paulo: Edgar Blücher Ltda, 1974.
- BAUMGART, John K. **Algebra**. Trad. Hygino H. Domingues. Sao Paulo: Atual, 1992.
- BOYLESTAD, R. **Introdução à análise de circuitos**. 10. Ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.



COSTA.E.S. **Um olhar para a matemática presente no ambiente da eletrotécnica: contribuições para a educação profissional.** Bahia: IFBA. Outubro /dezembro, 2013.

CARLOS Ferreira, **Teoria da Corrente Alternada**, Instituto Superior de Engenharia do Porto, Portugal.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemática.** Lisboa: Tipografia Matemática, 1951.

CARMO, Manfredo Perdigão de; MORGADO, Augusto Cesar; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria / Números Complexos.** Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro-RJ, 1992.

CAON, Fernanda. **Números complexos: inter-relação entre conteúdos e aplicações/** Fernanda Caon. Ponta Grossa, 2013.

DANTE. Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações/** Luiz Roberto Dante. -2. Ed.- São Paulo: Ática, 2013.

FIGUEIREDO, Chênia Rocha. **Equipamentos elétricos e eletrônicos.** / Chênia Rocha Figueiredo. – Brasília : Universidade de Brasília, 2007. 104 p.

Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce, David Degenszajn, Roberto Périgo. **Matemática: volume único/** Gelson Iezzi.. (et al.).- 5.ed.- São Paulo : Atual, 2011.

GREF. **Física 3 – eletromagnetismo.** EDUSP, 2000.

JOSÉ Rodrigues, **Electrotecnia - Corrente Alternada**, Didáctica Editora, Portugal, 1984.

MARKUS, O. **Circuitos elétricos: Corrente contínua e Corrente Alternada.** 9. Ed. São Paulo: Érica, 2004.

PINTO JUNIOR, Ulício. **A História dos números complexos: das quantidades sofisticadas de Cardano às linhas orientadas de Argand /** Ulício Pinto Júnior. -- Rio de Janeiro: UFRJ / Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, 2009.

RICIERE, A.P. **Arqueologia Matemática: A origem da Matemática nas civilizações antigas.** São Paulo: Parma, 1991.

Santos, Kelly Vinente. **dos Fundamentos de eletricidade /** Kelly Vinente dos Santos. – Manaus : Centro de Educação Tecnológica do Amazonas, 2011.